

الجزء الأول : لتكن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  بجدول تغيراتها كالتالي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$-5$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

(I) تكتب  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$  حيث  $a$  ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية

(1) أحسب الدالة المشتقة  $f'$  بدلالة  $a$  و  $c$

(2) بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة  $f$  عين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$ .

(3) عين  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) استنتج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = -1$ .

(5) أجب بصرح أو خطأ مع التبرير :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{أ})$$

(ب) - المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

(ج) - المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $[2.5; 2.7]$ .

$$f'(3) > 0 \quad (\text{د})$$

(6) استنتج إشارة الدالة  $f$ .

الجزء الثاني : نأخذ في ما يلي  $a = 1; b = -3; c = 1$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) بين أن  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 3$  مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$

(2) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$

(3) بين أن  $f(-x) + f(x) = -6$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(4) أنشئ  $(C_f)$  و المستقيمت المقاربة.

(5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي  $m$  إشارة و عدد حلول المعادلة :  $f(x) = m$ .

الجزء الثالث :  $g$  دالة ذات المتغير الحقيقي  $x$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  ب :  $g(x) = [f(x)]^2$

(1) أوجد نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أحسب  $g(1)$  ،  $g(-1)$  ،  $g(\alpha)$  و  $g(\beta)$

(3) بإستعمال مشتق مركب دالتين أحسب  $g'(x)$

(4) استنتج جدول تغيرات الدالة  $g$  (دون دراسة تغيراتها).

الجزء الأول :

لدينا الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  وتكتب على الشكل  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية

(1) حساب الدالة المشتقة  $f'$  بدلالة  $a$  و  $c$  :

$$f'(x) = a - \frac{c}{x^2} = \frac{ax^2 - c}{x^2} : \text{ودالتها المشتقة } f' \text{ على } \mathbb{R} - \{0\}$$

(2) تعيين الأعداد  $a, b, c$  بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة  $f$  :

$$\begin{cases} a - c = 0 \dots (1) \\ -a + b - c = -5 \dots (2) \\ a + b + c = -1 \dots (3) \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} \frac{a(-1)^2 - c}{(-1)^2} = 0 \\ a \times (-1) + b + \frac{c}{-1} = -5 \\ a \times (1) + b + \frac{c}{1} = -1 \end{cases} \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = -5 \\ f(1) = -1 \end{cases} \text{ من جدول التغيرات نجد : } \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = -5 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c \dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \\ 2c - 3 = -1 \dots (3) \end{cases} \text{ وتبعويض (1) و (2) في (3) نجد : } \begin{cases} a = c \dots (1) \\ 2b = -6 \dots (2) \\ a + b + c = -1 \dots (3) \end{cases} \text{ تكافئ بجمع (2) و (3) : } \begin{cases} a = c \dots (1) \\ 2b = -6 \dots (2) \\ a + b + c = -1 \dots (3) \end{cases}$$

$$\cdot f(x) = x - 3 + \frac{1}{x} \text{ الشكل } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases} \text{ نستنتج أن : } \begin{cases} a = c \dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \\ 2c = 2 \dots (3) \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} a = c \dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \\ 2c = 2 \dots (3) \end{cases}$$

(3) تعيين  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  وتفسير النتيجة هندسيا :

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty : \text{ لدينا من الجدول نجد أن : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

التفسير الهندسي : المنحنى البياني  $(C_f)$  يقبل المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (محور الترتيب) مستقيماً مقارباً.

(4) استنتاج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = -1$  :

$$\text{بما أن } f'(-1) = 0 \text{ فإن المنحنى } (C_f) \text{ يقبل مماساً موازياً لمحور الفواصل معادلته : } y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = f(-1) = -5$$

(5) الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير :

$$\left( \text{خطأ} \right) \quad f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) - \left( \text{خطأ} \right)$$

الدالة  $f$  متناقصة تماماً على  $]0; 1[$  الذي يشمل العددين  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  لأن  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$  فبتالي ينعكس ترتيب الصور .

$$\left( \text{صح} \right) \quad \text{ب- المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبلاً حلاً وحيداً } \alpha \text{ في المجال } \left[ \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$$

الدالة  $f$  مستمرة على  $\left[ \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$  لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على  $\mathbb{R} - \{0\}$

الدالة  $f$  رتيبة على  $\left[ \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$  (متناقصة تماماً على  $]0; 1[$  الذي يحويه)

$$\text{لدينا : } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \text{ ومنه : } f\left(\frac{1}{3}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} < 0$$

ومنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة - المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلاً حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $\left[ \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$

(ج) - المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $[2.5; 2.7]$  (صح)

لأنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، الدالة  $f$  مستمرة على  $[2.5; 2.7]$  لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على  $\mathbb{R} - \{0\}$   
 الدالة  $f$  رتيبة على  $[2.5; 2.7]$  (متزايدة تماما على  $[1; +\infty[$  الذي يحويه)  
 لدينا:  $f(2.5) = 2.5 - 3 + \frac{1}{2.5} = -0.1$  و  $f(2.7) = 2.7 - 3 + \frac{1}{2.7} = 0.07$  و  $f(2.5) \times f(2.7) = -0.007 < 0$  : ومنه

(د) -  $f'(3) > 0$  (صح)

لأن  $f'(x) > 0$  على المجال  $[1; +\infty[$  و  $3 \in ]1; +\infty[$

### (6) استنتاج جدول إشارة الدالة $f$ :

من السؤال (5) و جدول تغيرات الدالة  $f$  نجد :

$x$	$-\infty$	$0$	$a$	$\beta$	$+\infty$	
$f(x)$	-	+	0	-	0	+

### الجزء الثاني :

نأخذ في ما يلي  $a = 1; b = -3; c = 1$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس :

### (1) تبيان أن $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x - 3$ مقاربا مائلا :

ليكن  $x$  عدد حقيقي غير معدوم  $\frac{1}{x}$   $f(x) - y = \left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) - (x - 3) = \frac{1}{x}$

بأن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

نستنتج أن  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 3$  مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$ .

### (2) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ :

يكفي دراسة إشارة الفرق  $f(x) - y = \frac{1}{x}$  ومنه :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	+	
الوضعية		$(C_f)$ تحت $(\Delta)$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$

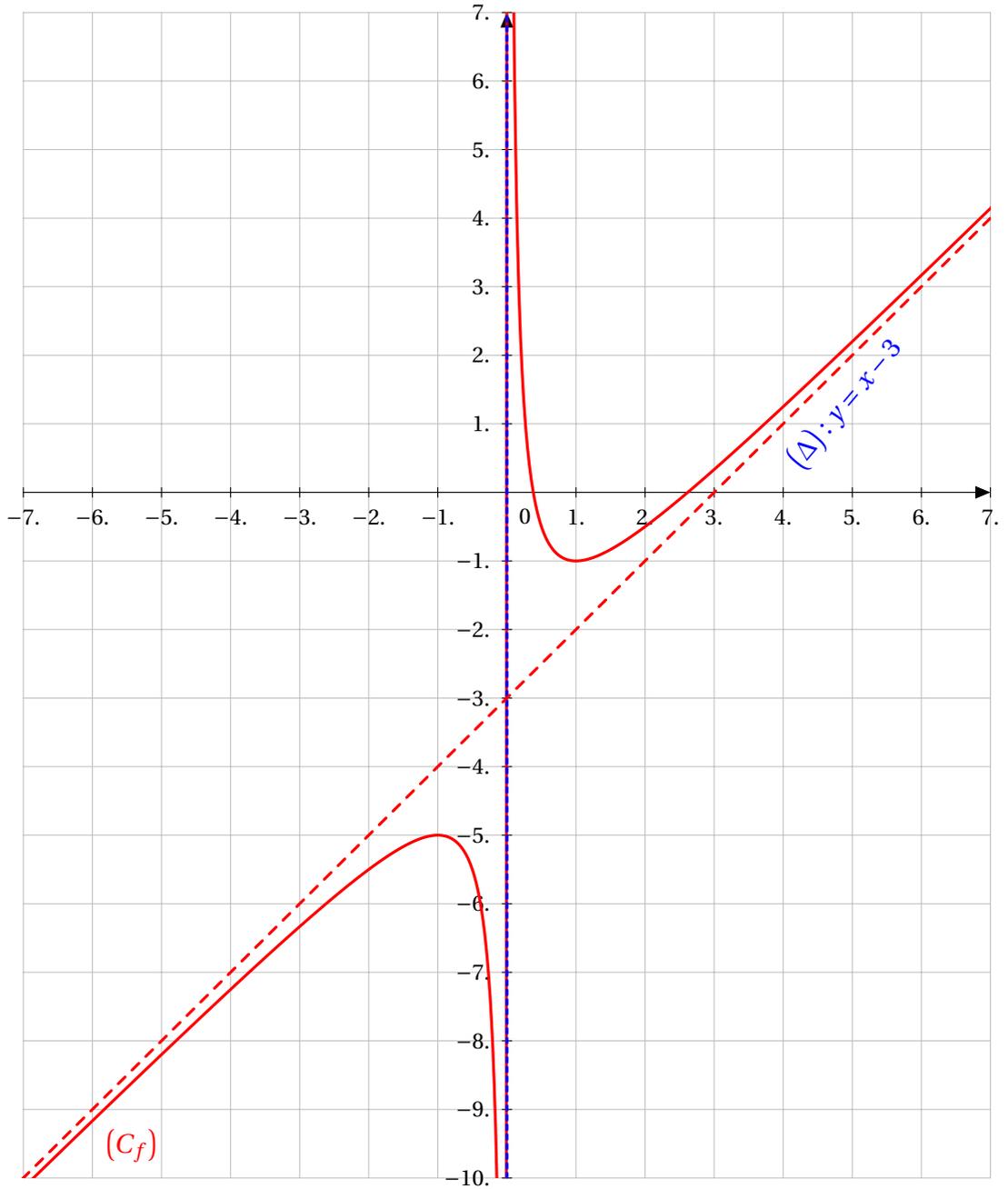
إذا كان  $x \in ]-\infty; 0[$  فإن  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$  ، أما إذا كان  $x \in ]0; +\infty[$  فإن  $(C_f)$  يقع فوق  $(\Delta)$

### (3) بيان أن $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا :  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  و  $-x \in \mathbb{R} - \{0\}$  ومنه :  $f(-x) + f(x) = \left(-x - 3 - \frac{1}{x}\right) + \left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) = -3 - 3 = -6$

العلاقة العكسية محققة :  $f(2a - x) + f(x) = 2b$  مع  $a = 0$  و  $b = -3$  ومنه النقطة  $(0; -3)$  مركز تناظر للمنحني  $(C_f)$

#### 4) التمثيل البياني لـ $(C_f)$ والمستقيمات المقاربة:



#### 5) المناقشة البيانية حسب قيم العدد الحقيقي $m$ إشارة و عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$

- حلول المعادلة  $f(x) = m$  بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = m$ .
- إذا كان  $m \in ]-\infty; -5[$  يوجد حلين مختلفين سالبين
- إذا كان  $m = -5$  يوجد حل مضاعف سالب
- إذا كان  $m \in ]-5; -1[$  لا يوجد حل
- إذا كان  $m = -1$  يوجد حل مضاعف موجب
- إذا كان  $m \in ]-1; +\infty[$  يوجد حلين مختلفين موجبين.

#### الجزء الثالث :

$g$  دالة ذات المتغير الحقيقي  $x$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  بـ :  $g(x) = [f(x)]^2$  ،  $(C_g)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### (1) إيجاد نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^2 = +\infty \quad : \text{حساب نهاية الدالة } g \text{ عند } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)^2 = +\infty \quad : \text{حساب نهاية الدالة } g \text{ عند } -\infty$$

حساب نهاية الدالة  $g$  عند  $0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right)^2 = +\infty$$

### (2) حساب $g(\beta)$ ، $g(\alpha)$ ، $g(1)$ ، $g(-1)$ :

$$g(-1) = [f(-1)]^2 = (-5)^2 = 25$$

$$g(1) = [f(1)]^2 = (-1)^2 = 1$$

$$g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = (0)^2 = 0$$

### (3) حساب $g'(x)$

تفكك الدالة  $g$  إلى دالتين  $f$  و  $h$  بحيث  $g = h \circ f$  :  $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{h} x^2$

حساب  $g'(x)$  بإستعمال مشتق مركب دالتين: الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{0\}$  لأنها مربع دالة قابلة للاشتقاق و

عليه: وبتالي:  $g'(x) = h'(f(x)) \times f'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

### (4) تشكيل جدول تغيرات الدالة $h$ :

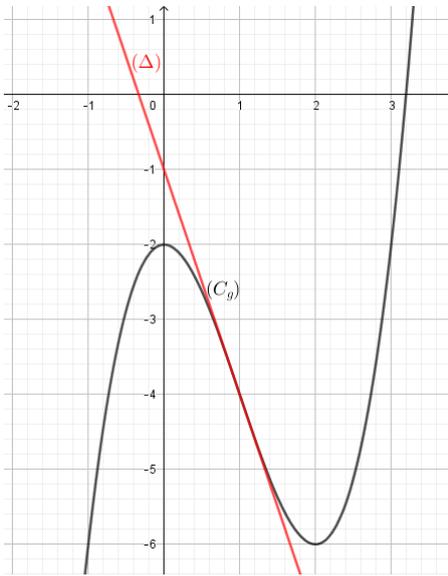
لدينا إشارة  $g'(x)$  من إشارة الجداء  $f'(x) \times f(x)$  بإستعمال جدول إشارة  $f(x)$  و  $f'(x)$  لدينا:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$\alpha$	$1$	$\beta$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-		0	+	
$f(x)$		-			+	0	-	+
$g'(x)$		-	0	+		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		1		$+\infty$

Diagram showing the sign of  $g(x)$  at various points:  $+\infty$  at  $-\infty$ ,  $+\infty$  at  $0$ ,  $0$  at  $\alpha$ ,  $1$  at  $1$ ,  $0$  at  $\beta$ , and  $+\infty$  at  $+\infty$ . Arrows indicate the direction of the function values.

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسوننا من خالص دعائكم

الجزء الأول :



الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.  
المستقيم  $(D)$  هو مماس للمنحنى  $(C_g)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.  
بقراءة بيانية :

- (1) أحسب كل من :  $g'(0)$  ,  $g'(2)$  ,  $g'(1)$  و  $g''(1)$  .
- (2) شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  .
- (3) حدد إشارة  $g(3)$  و  $g\left(\frac{7}{2}\right)$  ثم إستنتج وجود عدد حقيقي  $\alpha$  وحيد من المجال  $\left]3; \frac{7}{2}\right[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$  ثم تحقق أن :  $3.1 < \alpha < 3.2$  .
- (4) إستنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

الجزء الثاني :

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  ب :  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  , أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .
- (2) بين أنه من أجل كل  $x \neq 1$  :  $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
- (3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$  ثم إستنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .
- (4) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .
- (5) عين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .
- (6) بين أن :  $f(a) = 3 + \frac{6a}{(a-1)^2}$  ثم أعط حصر ل  $f(a)$  تدور النتائج إلى  $10^{-2}$  .
- (7) أكتب معادلة المستقيم  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة  $-\frac{1}{3}$  .
- (8) جد نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع محوري الإحداثيات .
- (9) أنشئ  $(\Delta)$  ,  $(C_f)$  .
- (10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  .

الجزء الثالث :

- الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  ب :  $h(x) = \frac{|x^3 + 1|}{(x-1)^2}$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني
- (1) أكتب  $h(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة .
  - (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند القيمة  $-1$  ثم فسر النتيجة هندسيا .
  - (3) إستنتج رسم المنحنى  $(C_h)$  إنطلاقا من  $(C_f)$  .

الجزء الأول :

(1) حساب  $g''(1), g'(1), g'(2), g'(0)$  :

•  $g'(0) = g'(2) = 0$  قيم حدية محلية .

•  $g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3$  : منه  $A(1; -4)$  و  $B(0; -1)$  من المماس  $(D)$  نختار نقطتين كقيمتين من المماس  $(D)$   $g''(1) = 0$  يغير وضعيته عند نقطة التماس و بالتالي فهو يخترق المنحنى  $(C_g)$  في النقطة ذات الفاصلة 1 التي تعتبر نقطة إنعطاف .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$-2$	$-6$	$+\infty$

(3) تحديد إشارة  $g(3)$  و  $g\left(\frac{7}{2}\right)$  :

من البيان نلاحظ أن :  $g(3) < 0$  و  $g\left(\frac{7}{2}\right) > 0$

إستنتاج وجود عدد حقيقي  $\alpha$  وحيد من  $\left]3; \frac{7}{2}\right[$  بحيث :  $g(\alpha) = 0$  :

الدالة  $g$  مستمرة و رتيبة تماما على  $\left]3; \frac{7}{2}\right[$  و  $g(3) \times g\left(\frac{7}{2}\right) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $3 < \alpha < \frac{7}{2}$  يحقق :  $g(\alpha) = 0$

التحقق أن :  $3.1 < \alpha < 3.2$  :

لدينا :  $\left]3; \frac{7}{2}\right[ \subset ]3.1; 3.2[$  إذن الدالة  $g$  مستمرة و رتيبة تماما على المجال  $[3.1; 3.2]$  و  $g(3.1) \approx -1.039$  و  $g(3.2) \approx 0.048$  أي :  $g(3.1) \times g(3.2) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث :  $3.1 < \alpha < 3.2$  يحقق  $g(\alpha) = 0$

(4) إستنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$0$	$+$

الجزء الثاني :

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(2) حساب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور الترتيب) للمنحنى  $(C_f)$  معادلته  $x = 1$  .

(3) تبيان أنه من أجل كل  $x \neq 1$  :  $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$  ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة  $(x-1)$  و  $g(x)$  لأن  $(x-1)^4 > 0$

$x$	$-\infty$	1	$\alpha$	$+\infty$
$(x-1)$	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+

و منه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; 1[$  و  $] \alpha; +\infty[$  و متناقصة تماما على المجال  $]1; \alpha]$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) حساب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x]$  ثم إستنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 2$  أي  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x - 2] = 0$  أي  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$  و منه نستنتج أن المستقيم

$y = x + 2$  : مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  و  $+\infty$  .

(5) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  :

$$f(x) - y = f(x) - (x+2) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$$

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$  :

$$\frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة الفرق من إشارة البسط  $3x-1$  لأن المقام موجب تماما  $(x-1)^2 > 0$ .

$$3x-1=0 \text{ أي } 3x=1 \text{ أي } x=\frac{1}{3}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$1$	$+\infty$
$f(x) - y$	-		0	+
الوضعية	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$		$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$

**(6) تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$  ثم تفسير النتيجة هندسيا :**

**طريقة 1 :**  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha)$  , بما أن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عند  $x = \alpha$  فإن  $f'(\alpha) = 0$ .

**طريقة 2 :**  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha) = \frac{(\alpha-1) \times g(\alpha)}{(\alpha-1)^4} = 0$  لأن  $g(\alpha) = 0$ .

**التفسير الهندسي :** المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا أفقيا معادلته  $y = f(\alpha)$ .

**(7) تبيان أن  $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  ثم إعطاء حصر ل  $f(\alpha)$  :**

$f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  معناه  $f(\alpha) - \left[ 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \right] = 0$  و منه :

$$f(\alpha) - \left[ 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \right] = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2} - 3 - \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 + 1 - 3(\alpha-1)^2 - 6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2}{(\alpha-1)^2} = \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = 0$$

إذن  $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ .

**حصر ل  $f(\alpha)$  :**

نعلم أن  $3.1 < \alpha < 3.2$  أي  $(3.1-1)^2 < (\alpha-1)^2 < (3.2-1)^2$  أي  $4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84$  أي  $\frac{1}{4.84} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{4.41}$ .

أي  $0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 0.23$  ولدينا أيضا  $18.6 < 6\alpha < 19.2$  و منه  $0.2 \times 18.6 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 0.23 \times 19.2$  أي  $3.72 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 4.42$ .

إذن  $6.72 < f(\alpha) < 7.42$  أي  $3 + 3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 3 + 4.42$ .

**(8) كتابة معادلة المستقيم  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة  $-\frac{1}{3}$  :**

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{24}$  و  $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$  و  $(T) : y = f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right)$  و منه :

$$(T) : y = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{24} = x + \frac{1}{3} + \frac{13}{24} = x + \frac{8}{24} + \frac{13}{24} = x + \frac{21}{24} = x + \frac{7}{8}$$

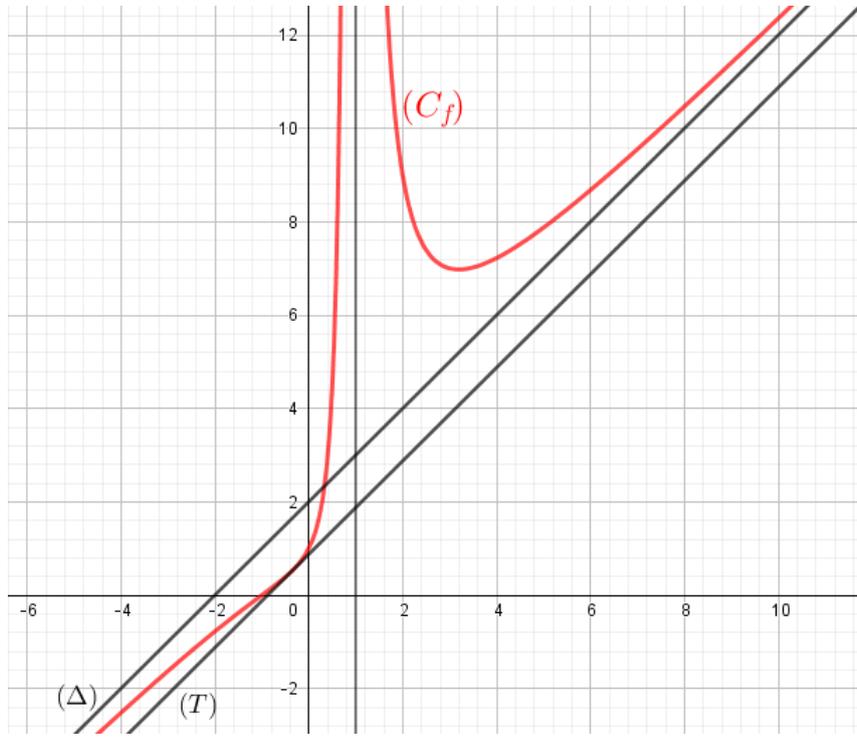
**(9) إيجاد نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع محوري الإحداثيات :**

**مع محور الفواصل :** نحل المعادلة  $f(x) = 0$

أي  $\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = 0$  أي  $x^3 + 1 = 0$  و منه  $x = -1$  إذن  $(C_f) \cap (xx') = \{A(-1; 0)\}$ .

**مع محور الترتيب :** نحسب  $f(0)$  أي  $f(0) = \frac{0^3 + 1}{(0-1)^2} = 1$  و منه  $f(0) = 1$  إذن  $(C_f) \cap (yy') = \{B(0; 1)\}$ .

**إنشاء المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$  :**



### 10 المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$ :

- حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  بيانها هي نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$  ذو المعادلة  $y = x + m$ 
  - لا توجد حلول :  $m < \frac{7}{8}$  ↯
  - حل مضاعف سالب :  $m = \frac{7}{8}$  ↯
  - حلين أحدهما معدوم والآخر سالب :  $m = 1$  ↯
  - حلين مختلفين في الإشارة :  $1 < m < 2$  ↯
  - حل وحيد موجب :  $m = 2$  ↯
  - حلين موجبين :  $m > 2$  ↯

### الجزء الثالث :

### 1 كتابة الدالة $h$ بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة  $x^3 + 1$  من إشارة  $x + 1$  لأن :  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  و  $x^2 - x + 1 > 0$  إذن :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x^3 + 1$	$-$	$0$	$+$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = f(x) : x \in [-1; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ -\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = -f(x) : x \in ]-\infty; -1[ \end{cases}$$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند  $(-1)$  :

دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند القيمة  $(-1)$  من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{(x + 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{3}{4}$$

• ومنه الدالة  $h$  تقبل الإشتقاق عند  $(-1)$  من اليمين .  
دراسة قابلية إشتقاق الدالة  $h$  عند القيمة  $(-1)$  من اليسار :

$$\lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} = \lim_{x \leq -1} \frac{-\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}}{x+1} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^3 + 1)}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{4}$$

• ومنه الدالة  $h$  تقبل الإشتقاق عند  $(-1)$  من اليسار .  
 بما أن :  $\lim_{x \geq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} \neq \lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)}$  فإن الدالة  $h$  لا تقبل الإشتقاق عند القيمة  $(-1)$  .

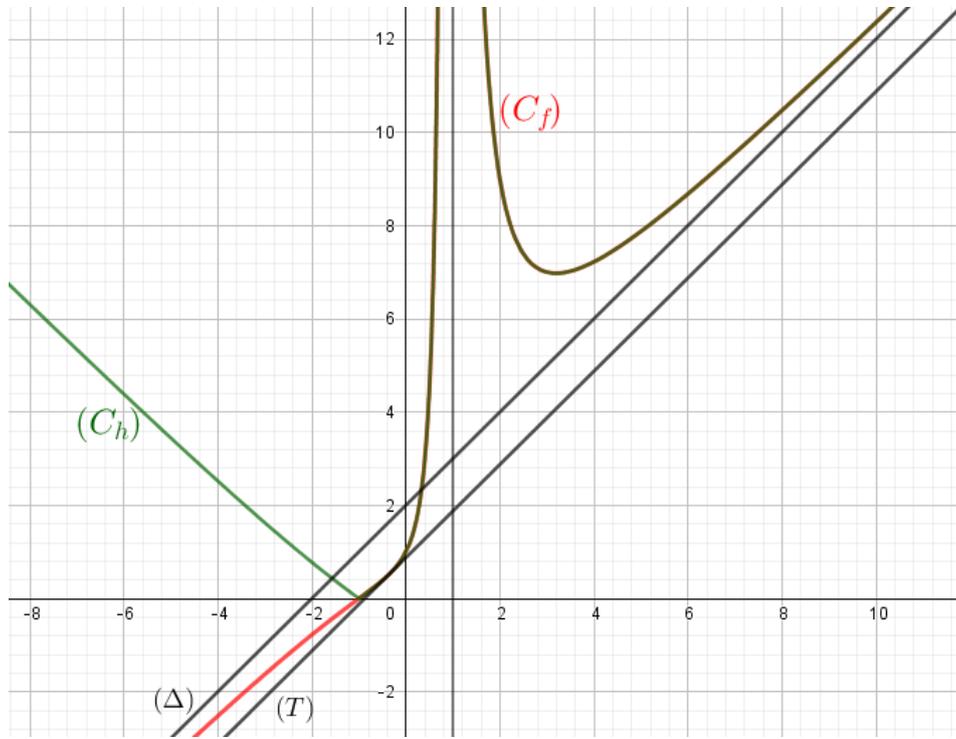
التفسير الهندسي :

المنحنى  $(C_h)$  يقبل عند النقطة  $A(-1; f(-1))$  نصفين مماسين حيث  $A(-1; 0)$  هي نقطة زاوية .

(3) إستنتاج رسم المنحنى  $(C_h)$  إنطلاقاً من  $(C_f)$  :

•  $(C_h)$  منطبق على  $(C_f)$  في المجال  $[-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$

•  $(C_h)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال  $] -\infty; -1[$



بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم

### الجزء الأول :

- تكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ ، و  $(C_g)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- أدرس تغيرات الدالة  $g$ .
  - برهن أن  $(C_g)$  يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_g)$ .
  - $\alpha$  و  $\beta$  عددان حقيقيان .  
برهن أنه إذا كان  $\beta > \alpha$  فإن  $g(\beta) > g(\alpha)$  ثم إستنتج مقارنة العددين  $g(2021)$  و  $g(2022)$  دون حساب قيمتها .
  - أعط إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  ثم إستنتج وضعية  $(C_g)$  بالنسبة لمحور الفواصل .
  - أرسم المنحنى  $(C_g)$ .

### الجزء الثاني :

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ ،  $(C_f)$  منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حيث :  $f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$
  - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
  - أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
  - بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$  فإن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$
  - إستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  على مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
  - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .
  - بين أنه يوجد مماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  في نقطة وحيدة  $A$  يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لـ  $(T)$ .
  - أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل.
  - أعط إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R} - \{1\}$  ثم إستنتج وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل .
  - أرسم  $(\Delta)$ ،  $(T)$  ثم  $(C_f)$  في معلم جديد يختلف عن  $(C_g)$ .
  - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلات التالية :

$$x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2 ; f(x) = x + m^2 - 4 ; -\frac{x}{(x-1)^2} = m ; f(x) = f(m) ; f(x) = |m| - 1 ; f(x) = m$$

### الجزء الثالث :

تكن الدوال العددية التالية :  $h_1, h_2, h_3$  حيث :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2, D_{h_2} = D_f \text{ و } h_2(x) = |f(x)|, D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ و } h_1(x) = f(|x|)$$

- بين أن  $h_1$  دالة زوجية .
- إشرح كيف يتم رسم المنحنيات  $(C_{h_3}), (C_{h_2}), (C_{h_1})$  إنطلاقا من منحنى  $(C_f)$  ثم أنشئها .

### الجزء الرابع :

تكن الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ :  $k(x) = f(x^2)$

- أدرس إتجاه تغير الدالة  $k$  ثم شكل جدول تغيراتها.

الجزء الأول :

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g : g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$  :  
 أ) حساب النهايات :

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

ب) حساب المشتقة وإشارتها :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة هي :  $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة :  $"3x^2 - 6x + 4"$  :  $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(3)(4) = -12 < 0$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $a = 3 > 0$  و منه :  $g'(x) > 0$

ج) إتجاه تغير الدالة  $g$  : لدينا  $g'(x) > 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

د) جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبيان أن  $(C_g)$  يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها :

لدينا :  $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$  و الدالة  $g'(x)$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

حساب الدالة المشتقة الثانية :  $g''(x) = 6x - 6$  : معناه :  $6x - 6 = 0$  و منه :  $6x = 6$  و منه :  $x = \frac{6}{6} = 1$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

بما أن  $g''(x)$  إنعدمت عند 1 و غيرت من إشارتها فإن النقطة  $I(1; g(1))$  أي :  $I(1; 2)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى  $(C_g)$ .

البرهان أن النقطة  $I$  هي مركز تناظر ل  $(C_g)$  :

$g(2-x) + g(x) = 4$  : أي  $g(2\alpha - x) + g(x) = 2\beta$  ,  $2\alpha - x \in D_g$  و  $x \in D_g$

لدينا :  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

$g(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 4x = (2-x)(2-x)^2 - 3(x^2 + 4 - 4x) + 8 - 4x = (2-x)(x^2 + 4 - 4x) - 12 - 3x^2 + 12x + 8 - 4x =$

$8 + 2x^2 - 8x - 4x - x^3 + 4x^2 - 12 - 3x^2 + 12x + 8 - 4x = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

و منه :  $g(2-x) + g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4 + x^3 - 3x^2 + 4x = 4$  : مركز تناظر المنحنى  $(C_g)$ .

(3) البرهان أنه إذا كان  $\beta > \alpha$  فإن :  $g(\beta) > g(\alpha)$  :

لدينا :  $\beta > \alpha$  و الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  فإن :  $g(\beta) > g(\alpha)$

إستنتاج المقارنة بين  $g(2022)$  و  $g(2021)$  :

لدينا :  $2022 > 2021$  و الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  فإن :  $g(2022) > g(2021)$

(4) إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$  أي  $g(x) = x(x^2 - 3x + 4)$  :  
 $g(x) = 0$  معناه : إما  $x = 0$  أو  $x^2 - 3x + 4 = 0$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$  و منه :  $x^2 - 3x + 4 > 0$

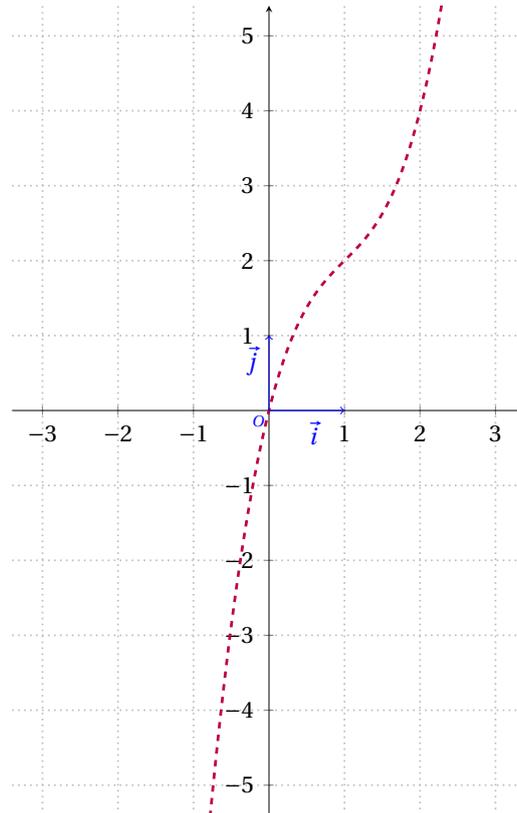
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x$	-	0	+
$x^2 - 3x + 4$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+

إستنتاج وضعية  $(C_g)$  بالنسبة إلى محور الفواصل :

نحتاج إلى إشارة  $g(x)$  لتحديد وضعية  $(C_g)$  بالنسبة إلى محور الفواصل .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
الوضعية	<p>(<math>C_g</math>) فوق (<math>xx'</math>)    (<math>C_g</math>) يقطع (<math>xx'</math>) في النقطة <math>A(0;0)</math>    (<math>C_g</math>) تحت (<math>xx'</math>)</p>		

(5) الرسم :



## الجزء الثاني :

• المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$   $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

(1) **تعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حيث :**  $f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$

$$f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-1)^2 + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax(x^2 - 2x + 1) + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 - 2ax^2 + (a+b)x}{(x-1)^2}$$

• بالمطابقة مع  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$  نجد :  $a = 1$  و  $a + b = 0$  أي  $b = -1$  ، إذن :

(2) **حساب النهايات :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

•  $x = 1$  معادلته (موازي لمحور الترتيب) مقاربا عموديا (تفسير الهندسي :  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا)

(3) **حساب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  :**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)^3 - 2(2+h)^2}{(2+h-1)^2} - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)(2+h)^2 - 2(2+h)^2}{(2+h-1)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2[2+h-2]}{h(h+1)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2}{(h+1)^2} = \frac{2+0}{0+1} = 4 \in \mathbb{R}$$

• الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند العدد 2 أي :  $f'(2) = 4$

(تفسير الهندسي :  $(C_f)$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2 معامل توجيهه يساوي 4 و منه معادلة هذا المماس هي :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 0 = 4x - 8$$

(4) **تبيان أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$  فإن :**  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجالين :  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$  و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 2x^2)}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2x^3 + 4x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

(5) **إستنتاج إتجاه تغير الدالة  $f$  :**

لدينا :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$  و منه : إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
$(x-1)^3$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

• و منه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]1; +\infty[$  و متناقصة تماما على المجال  $]0; 1[$

**جدول تغيرات الدالة  $f$  :**

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

### (6) تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - \frac{x}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

و منه :  $y = x$  : مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  و  $+\infty$

### دراسة الوضعية النسبية بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ :

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$

$$\bullet \text{ لدينا : } f(x) - y = \frac{-x}{(x-1)^2}$$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x$		+	0	-
$(x-1)^2$		+	0	+
$f(x) - y$		+	0	-

### الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0	-
الوضعية	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$	$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;0)$	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$

### (7) تبيان أنه يوجد مماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في نقطة وحيدة $A$ :

$(\Delta) \parallel (T)$  معناه :  $f'(x) = 1$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1(x-1)^3}{(x-1)^3} = 0 \text{ يكافئ : } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} - 1 = 0 \text{ يكافئ : } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = 1 \text{ يكافئ : } f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3} = 1$$

$$\bullet \text{ يكافئ : } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x-1)^3} = 0 \text{ أي : } x + 1 = 0 \text{ أي : } x = -1$$

و منه  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  حيث  $(\Delta) \parallel (T)$  عند النقطة  $A(-1; f(-1))$

$$\bullet A(-1; -\frac{3}{4}) \text{ أي : } f(-1) = \frac{(-1)^3 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{-1-2}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$\bullet \text{ معادلة ديكرتية للمماس } (T) \text{ عند النقطة } A(-1; -\frac{3}{4}) \text{ : } (T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 1(x + 1) - \frac{3}{4} = x + \frac{1}{4}$$

**(8) إيجاد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل  $(xx')$  :**

نحل المعادلة :  $f(x) = 0$  أي  $\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = 0$  أي  $x^3 - 2x^2 = 0$  أي  $x^2(x-2) = 0$  إما  $x^2 = 0$  أو  $x-2 = 0$  أي  $x = 0$  ;  $x = 2$  و منه :  $(C_f) \cap (xx') = \{(0,0); (2,0)\}$

**(9) إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R} - \{1\}$  :** لدينا  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$  أي  $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

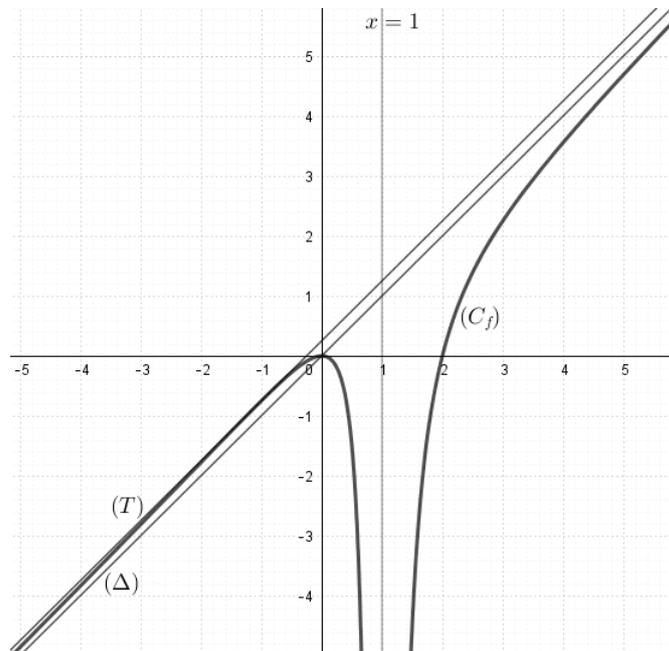
$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$	
$x^2$	+	0	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	0	+	
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+	
$f(x)$	-	0	-	-	0	+

**الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل  $(xx')$  :**

لدينا إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R} - \{1\}$  و منه :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	-	-	0	+
الوضعية	تحت $(C_f)$ $(xx')$	$(C_f)$ يمس $(xx')$	تحت $(C_f)$ $(xx')$	تحت $(C_f)$ $(xx')$	$(C_f)$ يقطع $(xx')$	فوق $(C_f)$ $(xx')$

**(10) الرسم :**



## (11) المناقشة البيانية :

- $f(x) = m$  الحلول البيانية للمعادلة  $f(x) = m$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$  ذو المعادلة  $y = m$ .
- $m < 0$  أو  $m \in ]-\infty; 0[$  للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا).
  - $m = 0$  للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما.
  - $m > 0$  أو  $m \in ]0; +\infty[$  للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.

$$f(x) = |m| - 1 \quad \blacktriangleleft$$

- $|m| - 1 < 0$  أي  $|m| < 1$  أي  $-1 < m < 1$  للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا).
- $|m| - 1 = 0$  أي  $|m| = 1$  أي  $m = 1$  و  $m = -1$  للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما.
- $|m| - 1 > 0$  أي  $|m| > 1$  و  $m < -1$  و  $m > 1$  للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.

$$f(x) = f(m) \quad \text{مع } m \neq 1 \quad \blacktriangleleft$$

- $f(m) < 0$  أي  $f(m) < 0$  :  $m \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[$  للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا).
- $f(x) = m$  أي  $m = 0$  أو  $m = 2$  للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما  $x = 2$ .
- $f(m) > 0$  أي  $m > 2$  للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.

$$f(x) = x + m : \text{ نضيف } x \text{ لكل طرف } x - \frac{x}{(x-1)^2} = x + m \quad \text{مناقشة ماثلة أي } (T) \parallel (\Delta_m) \parallel (\Delta) \quad \blacktriangleleft$$

- $m < 0$  للمعادلة حلان موجبان تماما.
- $m = 0$  للمعادلة حلا وحيدا معدوما.
- $0 < m < \frac{1}{4}$  للمعادلة حلان سالبان.
- $m = \frac{1}{4}$  للمعادلة حلا مضاعفا سالبا.
- $m > \frac{1}{4}$  لا يوجد حلول للمعادلة.

$$f(x) = x + m^2 - 4 \quad \text{مناقشة ماثلة } (T) \parallel (\Delta_m) \parallel (\Delta) \quad \blacktriangleleft$$

- $m^2 - 4 < 0$  أي  $m^2 < 4$  أي  $\sqrt{m^2} < \sqrt{4}$  أي  $|m| < 2$  و منه  $-2 < m < 2$  للمعادلة حلان متميزان موجبان.
- $m^2 - 4 = 0$  أي  $m^2 = 4$  أي  $\sqrt{m^2} = \sqrt{4}$  أي  $|m| = 2$  أي  $m = 2$  و  $m = -2$  للمعادلة حلا واحدا معدوما.
- $0 < m^2 - 4 < \frac{1}{4}$  أي  $4 < m^2 < \frac{17}{4}$  أي  $\sqrt{4} < \sqrt{m^2} < \sqrt{\frac{17}{4}}$  أي  $2 < m < \sqrt{\frac{17}{4}}$  للمعادلة حلان سالبان.

$$m^2 - 4 = \frac{1}{4} \quad \text{أي } m^2 = \frac{17}{4} \quad \text{أي } \sqrt{m^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{أي } |m| = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{أي } m = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{أو } m = -\frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{للمعادلة حلا مضاعفا سالبا.}$$

$$m^2 - 4 > \frac{1}{4} \quad \text{أي } m^2 > \frac{17}{4} \quad \text{أي } \sqrt{m^2} > \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{أي } |m| > \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{أي } m < -\frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{أو } m > \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{لا يوجد حلول للمعادلة.}$$

$$x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2 \quad \text{أي } \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = mx \quad \text{أي } f(x) = mx \quad \text{مناقشة دورانية.}$$

لتكن  $A_0(x_0; y_0)$  حيث  $A_0$  نقطة ثابتة من  $(\Delta_m)$  حيث معادلة  $(\Delta_m)$  هي  $y = mx$

- $A_0 \in (\Delta_m)$  معناه  $y_0 = mx_0$  معناه  $mx_0 - y_0 = 0$  (المتغير هو الوسيط  $m$ ) أي  $x_0 = 0$  و  $y_0 = 0$  أي  $A_0(0; 0)$ .
- $m < 0$  للمعادلة ثلاث حلول واحد معدوم و 2 موجبة تماما.
- $m = 0$  للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم و الآخر موجب تماما.

•  $0 < m < 1$  للمعادلة ثلاث حلول واحد سالب و آخر معدوم و آخر موجب .

•  $m = 1$  للمعادلة حلا واحدا معدوما .

•  $m > 1$  للمعادلة حلا واحدا معدوما .

### الجزء الثالث :

لدينا الدوال العددية التالية :  $h_3, h_2, h_1$  حيث :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2 \quad , D_{h_2} = D_f \text{ و } h_2(x) = |f(x)| \quad , D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ و } h_1(x) = f(|x|)$$

### (1) تبيان أن $h_1$ دالة زوجية :

بما أن  $D_{h_1}$  متناظرة بالنسبة إلى  $O$  لأن :  $]-x \in D_{h_1} \text{ و } x \in D_{h_1} \text{ و } D_{h_1} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  :

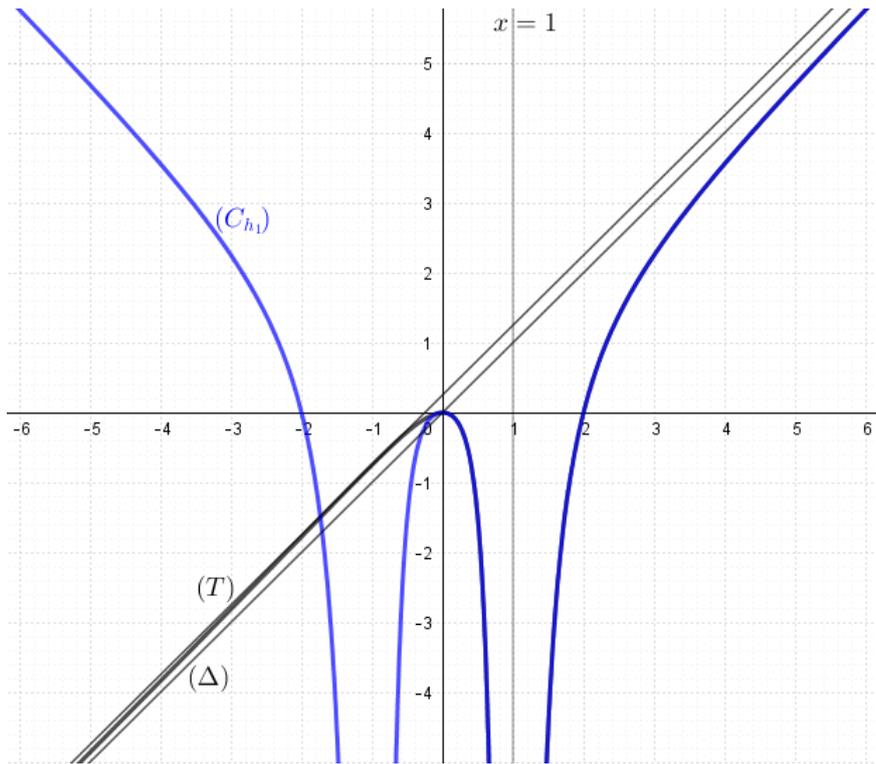
•  $h_1(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h_1(x)$  ومنه  $h_1$  دالة زوجية و  $(C_{h_1})$  يكون متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

### (2) شرح كيفية رسم المنحنيات $(C_{h_3}), (C_{h_2}), (C_{h_1})$ إنطلاقا من منحنى $(C_f)$ مع إنشائها :

#### شرح كيفية رسم $(C_{h_1})$ :

$$h_1(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) : x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(-x) : x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \end{cases}$$

•  $(C_{h_1})$  ينطبق على  $(C_f)$  في المجال  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  و بما أن  $h_1$  دالة زوجية فنناظر  $(C_{h_1})$  بالنسبة إلى محور الترتيب .

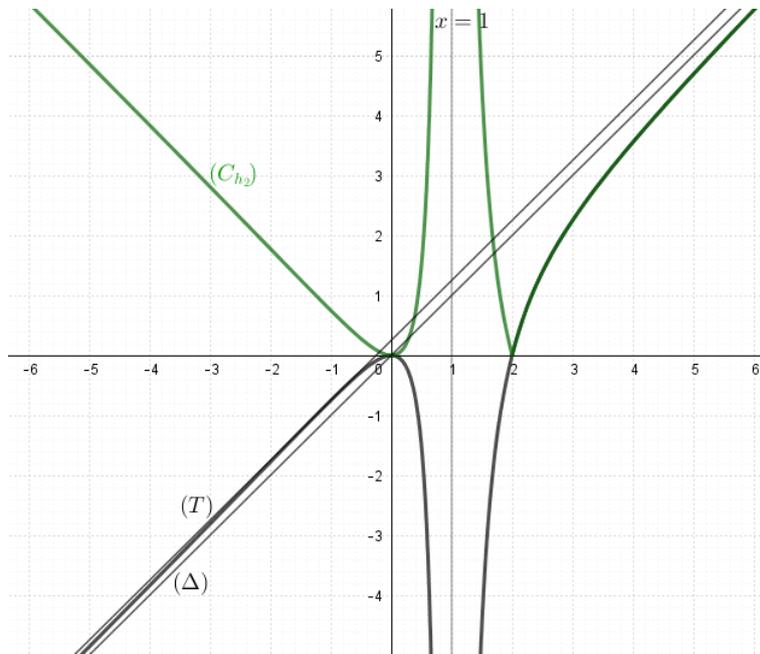


#### شرح كيفية رسم $(C_{h_2})$ :

$$h_2(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) : f(x) \geq 0 \\ -f(x) : f(x) < 0 \end{cases}$$

$(C_{h_2})$  يقع فوق محور الفواصل لأن  $|f(x)| \geq 0$

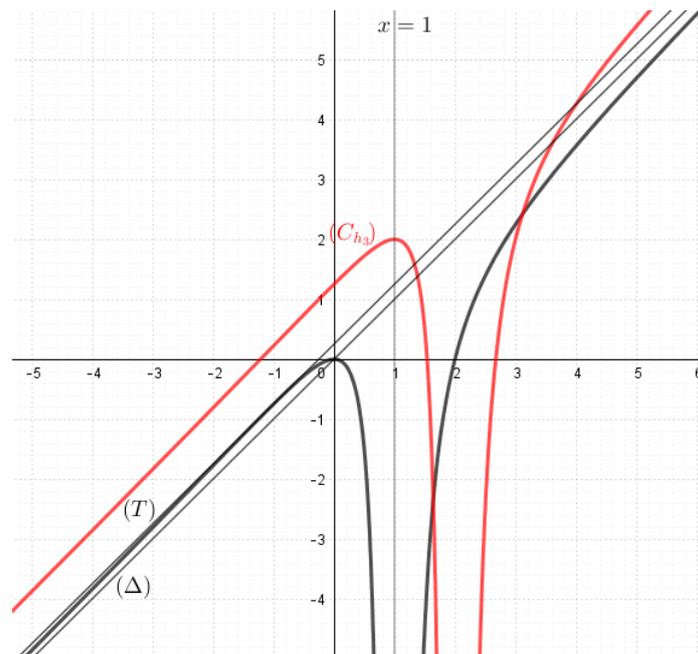
•  $(C_{h_2})$  ينطبق على  $(C_f)$  على المجال  $[2; +\infty[$  و  $(C_{h_2})$  ينظر  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال  $]1; 2]$  و  $]1; -\infty[$  .



شرح كيفية رسم  $(C_{h_3})$  :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2$$

يتم رسم  $(C_{h_3})$  إنطلاقاً من  $(C_f)$  بإنسحاب شعاعه  $1\vec{i} + 2\vec{j}$



الجزء الرابع :

الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ :  $k(x) = f(x^2)$

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة  $k$  ثم شكل جدول تغيراتها :

نلاحظ أن  $k = f \circ u$  حيث  $u(x) = x^2$

- الدالة  $k$  قابلة للإشتقاق على المجالات  $]-\infty; -1[$  و  $]1; +\infty[$  و دالتها المشتقة هي :  $k'(x) = 2xf'(x^2)$
- $f'(x^2) \geq 0$  إذا كان :  $x^2 \leq 0$  لما  $x = 0$  أو  $x^2 > 1$  أي :  $\sqrt{x^2} > \sqrt{1}$  أي :  $|x| > 1$  أي :  $x > 1$  أو  $x < -1$ .
- $f'(x^2) \leq 0$  إذا كان :  $0 \leq x^2 < 1$  أي :  $\sqrt{x^2} < \sqrt{1}$  أي :  $|x| < 1$  أي :  $-1 < x < 1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$f'(x^2)$	+	-	-	-	+
$k'(x)$	-	+	0	-	+

و بالتالي : الدالة  $k$  متناقصة تماما على المجالين  $]-\infty; -1[$  و  $]0; 1[$  و متزايدة تماما على المجالين  $]1; +\infty[$  و  $] -1; 0]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$k(0) = f(0^2) = f(0) = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$k'(x)$	-	+	0	-	+
$k(x)$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم